

Τεύκρος Μιχαηλίδης

**ΜΙΛΩΝΤΑΣ
ΣΤΗΝ ANNA
ΓΙΑ ΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**



ΤΕΥΚΡΟΣ ΜΙΧΑΗΛΙΔΗΣ

*Μιλώντας
στην Άννα
για τα μαθηματικά*

«Το παρόν έργο πνευματικής ιδιοκτησίας προστατεύεται κατά τις διατάξεις της ελληνικής νομοθεσίας (Ν. 2121/1993 όπως έχει τροποποιηθεί και ισχύει σήμερα) και τις διεθνείς συμβάσεις περί πνευματικής ιδιοκτησίας. Απαγορεύεται απολύτως η άνευ γραπτής άδειας του εκδότη κατά οποιονδήποτε τρόπο ή μέσο (ηλεκτρονικό, μηχανικό ή άλλο) αντιγραφή, φωτοανατύπωση και εν γένει αναπαραγωγή, εκμίσθωση ή δανεισμός, μετάφραση, διασκευή, αναμετάδοση στο κοινό σε οποιαδήποτε μορφή και η εν γένει εκμετάλλευση του συνόλου ή μέρους του έργου».

Εκδόσεις Πατάκη – Σειρά «Μιλώντας για...»

Τεύχος Μιχαηλίδης, *Μιλώντας στην Άννα για τα μαθηματικά*

Υπεύθυνος έκδοσης Άγγελος Κοκολάκης

Διορθώσεις Ευαγγελία Δάλκου

Σελιδοποίηση Σπυριδούλα Βονίτση

Φιλμ-μοντάζ Κέντρο Γρήγορης Εκτύπωσης

Copyright© Τεύχος Μιχαηλίδης και Σ. Πατάκης ΑΕΕΔΕ

(Εκδόσεις Πατάκη), 2014

Πρώτη έκδοση από τις Εκδόσεις Πατάκη, Αθήνα, Σεπτέμβριος 2014

KET 9214 ΚΕΠ 713/14

ISBN 978-960-16-5813-1



ΠΑΝΑΓΗ ΤΣΑΛΔΑΡΗ (ΠΡΩΗΝ ΠΕΙΡΑΙΩΣ) 38, 104 37 ΑΘΗΝΑ,
ΤΗΛ.: 210.36.50.000, 210.52.05.600, 801.100.2665, ΦΑΞ: 210.36.50.069
ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ: ΕΜΜ. ΜΠΕΝΑΚΗ 16, 106 78 ΑΘΗΝΑ, ΤΗΛ.: 210.38.31.078
ΥΠΟΚΑΤΑΣΤΗΜΑ: ΚΟΥΤΣΑΣ (ΤΕΡΜΑ ΠΟΝΤΟΥ - ΠΕΡΙΟΧΗ Β' ΚΤΕΟ),
570 09 ΚΑΛΟΧΩΡΙ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ, ΤΗΛ.: 2310.70.63.54, 2310.70.67.15, ΦΑΞ: 2310.70.63.55
Web site: <http://www.patakis.gr> • e-mail: info@patakis.gr, sales@patakis.gr

Η Άννα δεν είναι υπαρκτό πρόσωπο.
Είναι ένα κράμα από δεκάδες αγόρια και κορίτσια
που γνώρισα όλα αυτά τα χρόνια
και μου χάρισαν αυτό που εγώ θεωρώ
την υπέρτατη δικαίωση: να διαβάσω τη χαρά
της μαθηματικής ανακάλυψης
μέσα στη λάμψη των ματιών τους.
Σε όλα αυτά τα παιδιά αφιερώνω ετούτο το βιβλίο.
Με αγάπη και ευγνωμοσύνη.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Ναυτίλοι, ηλιοτρόπια και κουνέλια	11
2. Οι αριθμοί	31
3. Η κρίση της ασυμμετρίας	42
4. Κατασκευές με κανόνα και διαβήτη	54
5. Κωνικές τομές	64
6. Καρτεσιανές συντεταγμένες	81
7. Οι αρνητικοί αριθμοί	92
8. Μια βόλτα μέχρι το άπειρο	107
9. Η μέθοδος της εξάντλησης	126
10. Η μαθηματικοποίηση της φύσης	140
11. Πρώτοι αριθμοί και κρυπτογραφία	156
12. Γράμμα από το Παρίσι	166
Σημειώσεις	187
Ευρετήριο	195

1.

ΝΑΥΤΙΛΟΙ, ΗΛΙΟΤΡΟΠΙΑ ΚΑΙ ΚΟΥΝΕΛΙΑ

Γνώρισα την Άννα όταν ήταν δέκα ετών. Ο Ιούνιος κόντευε να τελειώσει και είχαμε μόλις εγκατασταθεί στο εξοχικό μας για το καλοκαίρι. Επιθεωρούσα τα λιοτρόπια που είχα φυτέψει κατά μήκος της μεσοτοιχίας με το διπλανό οικόπεδο, όταν ανάμεσα στους ήλιους ξεπρόβαλε και το δικό της κεφαλάκι, καστανόξανθο, με μια μικρή, αυθάδικα ανασηκωμένη μύτη και γαλάζια διαπεραστικά ματάκια.

Με είχε ενημερώσει η γυναίκα μου ότι το σπίτι του κυρ Θόδωρου, ενός στριμμένου, υπέρβαρου κακόγερου που μας είχε αφήσει χρόνους, είχε πρόσφατα πουληθεί, δεν είχαμε όμως ακόμα γνωριστεί με τους καινούριους ιδιοκτήτες.

«Τι κάνεις εκεί πέρα;» με ρώτησε. Πάντα με ενθουσίαζε ο αυθόρμητος τρόπος των παιδιών που, αγνοώντας τις τυπικότητες και τις συστάσεις, πηγαίνουν κατευθείαν

στο ψητό. Σ' αυτό μοιάζουν με τους ανθρώπους του σιναφιού μου – δε θυμάμαι αν είπα πως είμαι μαθηματικός.

«Μετρώω», της απάντησα στον ίδιο τόνο.

«Τι μετράς;»

«Έλα από 'δώ να δεις».

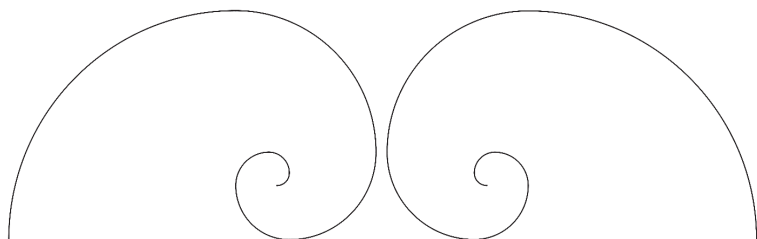
Το κεφαλάκι εξαφανίστηκε και σε λίγο ένα συμπαθέστατο σαμιαμίδι με περισπούδαστο ύφος και γόνατα γεμάτα γρατζουνιές χτυπούσε το κουδούνι της αυλόπορτας.

«Έλα», της είπα και την οδήγησα μπροστά στα λιοτρόπια μου. «Βλέπεις αυτά τα λεπτά κοτσάνια που ξεκινούν από το κέντρο του λουλουδιού και προχωρούν σχηματίζοντας ελικοειδείς γραμμές προς την περιφέρεια; Είναι οι στήμονες».



Έσκυφε πάνω από το λουλούδι κι έμεινε αρκετή ώρα να το κοιτάζει.

«Είναι δυο ειδών γραμμές», μου είπε τελικά. «Άλλες στριφογυρνάνε προς τα αριστερά κι άλλες προς τα δεξιά».



«Σωστά! Κι εγώ προσπαθώ να μετρήσω πόσους στήμονες έχουν οι δεξιόστροφες έλικες και πόσους οι αριστερόστροφες».

Με κοίταξε απορημένη.

«Κανονικά η μια έλικα πρέπει να έχει 34 στήμονες και η άλλη 55», πρόσθεσα.

«Γιατί;»

«Δεν ξέρω. Έτσι τα κανόνισε η φύση!»

«Θέλω να πω, εσένα τι σε νοιάζει;»

«Είναι μεγάλη ιστορία. Θέλεις να την ακούσεις;»

Κοίταξε γύρω της. Βρήκε ένα χοντρό κούτσουρο που έμοιαζε λίγο με σκαμνάκι και κάθισε. «Ακούω», είπε με αέρα περιγίπισσας που δίνει ακρόαση σε υπήκοό της.

«Υπάρχουν πολλοί τρόποι να βάλει κανείς αριθμούς στη σειρά. Ο πιο απλός είναι ο συνηθισμένος τρόπος που μετράμε: 1, 2, 3... Μπορείς όμως να προχωράς με μεγαλύτερα βήματα: 1, 3, 5, 7... ή 1, 6, 11, 16, 21...»

«Πρέπει να ξεκινάς πάντα από το 1;»

«Όχι, καθόλου. Μπορείς να ξεκινάς από όποιον αριθμό θέλεις: 8, 12, 16, 20...»

«Δηλαδή πρέπει να διαλέγεις με ποιον αριθμό αρχίζεις και ποιον αριθμό θα προσθέτεις για να βρεις τον επόμενο».

«Μπράβο! Όταν λοιπόν ορίζεις έναν κανόνα για να βάζεις αριθμούς στη σειρά, λέμε ότι δημιουργείς μια αριθμητική ακολουθία. Η ακολουθία την οποία δημιουργούμε επιλέγοντας έναν αρχικό αριθμό και μια σταθερή διαφορά, που την προσθέτουμε κάθε φορά για να βρούμε τον επόμενο αριθμό, λέγεται *αριθμητική πρόοδος*. Είναι μια από τις πιο απλές μορφές ακολουθίας».

«Υπάρχουν και πιο σύνθετες;»

«Βάλε τη φαντασία σου να δουλέψει. Χρειάζεσαι μια “αρχή” κι έναν “κανόνα παραγωγής”».

Με κοίταξε με τα φρύδια ζαρωμένα.

«3, 6, 12, 24...» της είπα.

Το πρόσωπό της φωτίστηκε:

«48, 96», συνέχισε.

«Δηλαδή;» την ενθάρρυνα.

«Αντί να προσθέτεις, πολλαπλασιάζεις».

«Ωραία. Αυτού του είδους η ακολουθία λέγεται *γεωμετρική πρόοδος*».

«Προοδεύει όμως πολύ γρήγορα», μου είπε κοροϊδευτικά. «Μετά το 96 έρχεται το... 192, ύστερα το...», κόμπιασε αρκετά, «...384, ύστερα το... ουφ, παράτα με», κατέληξε.

«Δεν έχεις άδικο», την καθησύχασα. «Γι’ αυτό και, όταν θέλουμε να πούμε ότι μια ποσότητα αυξάνεται

υπερβολικά γρήγορα, λέμε ότι “αυξάνεται γεωμετρικά” ή “κατά γεωμετρική πρόοδο”. Εμείς όμως δεν έχουμε παρά να βρούμε τον κανόνα. Τις πράξεις τις κάνουν οι υπολογιστές. Η δική μας η δουλειά είναι να επινοήσουμε έξυπνους κι ενδιαφέροντες κανόνες.

»Να ένας άλλος κανόνας: διαλέγω τον πρώτο και τον δεύτερο αριθμό να είναι ίσοι με 1. Ύστερα, κάθε νέος αριθμός προκύπτει από την πρόσθεση των δύο προηγούμενων αθροισμάτων: $1, 1, 1 + 1 = 2, 2 + 1 = 3, 3 + 2 = 5, 5 + 3 = 8$. Μπορείς να συνεχίσεις;»

«Αμέ! 13, 21, 34, 55...». Σταμάτησε και με κοίταξε. «Α! Γι’ αυτό έλεγες ότι οι στήμονες στο λουλούδι σου είναι ή 34 ή 55;».

«Έτσι έχω διαβάσει. Στα μικρά λιοτρόπια η μια έλικα έχει 21 στήμονες κι η άλλη 34. Στα μεγαλύτερα 34 και 55 και στα ακόμα πιο μεγάλα 55 και 89».

«Α, μάλιστα, $55 + 34 = 89$ ». Με κοίταξε δύσπιστα: «Και δε μου λες; Είναι αλήθεια;»

«Τι να σου πω; Το διάβασα σε τόσα βιβλία που στο τέλος το πίστεψα. Σήμερα το πρωί, πριν έρθεις, προσπαθούσα να βεβαιωθώ από μόνος μου. Όμως η ακολουθία Φιμπονάτσι υπάρχει παντού στη φύση, όχι μόνο στα λιοτρόπια».

«Φιμπονάτσι; Τι είν’ αυτό;»

«Ο Φιμπονάτσι ήταν ένας Ιταλός μαθηματικός που έζησε γύρω στο 1200 μ.Χ. Έγραψε ένα πολύ σημαντικό βιβλίο αριθμητικής, το *Liber Abaci*. Εκεί μέσα παρουσίαζε την ακολουθία που σου έδειξα και που φέρει σήμερα το όνομά του».

«Εντάξει. Λέω λοιπόν κι εγώ: αρχίζουμε με τρεις αριθμούς, το 1, το 2 και το 3. Κάθε νέος αριθμός θα δημιουργείται όταν προσθέσουμε τους τρεις προηγούμενους. 1, 2, 3, 6, 11, 20, 37... Θα το πουν ακολουθία της Άννας;»

«Άννα σε λένε;»

«Ναι, Άννα. Λοιπόν; Τι θα γίνει με την ακολουθία μου;»

«Έχεις και δίκιο και άδικο. Φυσικά και μπορείς, όπως και ο καθένας μας, να φανταστείς έναν αυθαίρετο κανόνα παραγωγής μιας ακολουθίας και να του δώσεις το όνομά σου. Το θέμα είναι αν η ακολουθία που θα δημιουργήσεις παρουσιάζει κάποιο ενδιαφέρον, είτε στα μαθηματικά είτε σε κάποια εφαρμογή που χρησιμοποιεί τα μαθηματικά. Αλλιώς εσύ θα φτιάξεις την ακολουθία σου, αλλά κανένας δε θα ασχοληθεί μ' αυτήν».

«Κι ο Φιμπονάτσι έφτιαξε την ακολουθία του για να μελετήσει τα λιοτρόπια;»

«Όχι! Νομίζω μάλιστα πως ούτε το φαντάστηκε πως έχει εφαρμογή και στα λιοτρόπια. Στο παράδειγμα του βιβλίου του ο Φιμπονάτσι μιλάει για κουνέλια: Ας φανταστούμε ότι υπάρχει μια ιδιαίτερη ράτσα κουνελιών που ενηλικιώνονται τον δεύτερο μήνα της ζωής τους και όταν είναι ενήλικα γεννούν κάθε μήνα από ένα νέο ζευγάρι κουνελιών. Αν εγκαταστήσουμε μέσα σ' ένα μεγάλο αγρόκτημα ένα ανήλικο ζευγάρι κουνελιών και υποθέσουμε ότι τα κουνέλια αυτά δεν πεθαίνουν όσο κρατάει το πείραμα, πόσα ζευγάρια θα έχουμε στην αρχή του πρώτου μήνα, στην αρχή του δεύτερου μήνα, στην αρχή του δέκατου μήνα;»

Πήρε μια βαθιά ανάσα, πιο πολύ για θεατρικούς λόγους, και ξεκίνησε:

«Λοιπόν:

Στην αρχή του 1ου μήνα έχουμε μόνο 1 ανήλικο ζευγάρι.

Στην αρχή του 2ου μήνα έχουμε το ίδιο 1 ζευγάρι, που τώρα είναι ενήλικο και μέσα στον μήνα θα γεννήσει.

Στην αρχή του 3ου μήνα έχουμε 2 ζευγάρια: το ενήλικο και αυτό που γέννησαν.

Στην αρχή του 4ου μήνα έχουμε 3 ζευγάρια: το αρχικό, το ζευγάρι το οποίο γεννήθηκε τον προηγούμενο μήνα και που τώρα είναι ενήλικο και ένα νέο ανήλικο ζευγάρι.

Στην αρχή του 5ου μήνα έχουμε 5 ζευγάρια: τα δύο ενήλικα που γέννησαν από ένα ανήλικο ζευγάρι και το ανήλικο του προηγούμενου μήνα που ενηλικιώθηκε.

Στην αρχή του 6ου μήνα έχουμε 8 ζευγάρια: τα τρία ενήλικα που γέννησαν άλλα τρία και τα δύο ανήλικα του προηγούμενου μήνα που ενηλικιώθηκαν, και πάει λέγοντας».

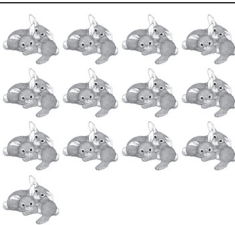
Σταμάτησε κοιτάζοντάς με διερευνητικά.

«Μπράβο!» της είπα. «Το έπιασες αμέσως το νόημα».

Χαμογέλασε με ικανοποίηση κι ύστερα σούφρωσε τη μύτη της:

«Μόνο που... νομίζω πως τέτοια “μαθηματικά” κουνέλια υπάρχουν μόνο στα παραμύθια».

«Δεν έχεις άδικο. Ο Φιμπονάτσι ήθελε απλώς να δώσει ένα παράδειγμα. Όμως την ακολουθία του τη βρί-

Μήνας	Ενήλικα	Ανήλικα	Σύνολο	
1ος	0	1	1	
2ος	1	0	1	
3ος	1	1	2	
4ος	2	1	3	
5ος	3	2	5	
6ος	5	3	8	
7ος	8	5	13	

σκουμε συνέχεια μπροστά μας. Όχι μόνο στα λιοτρόπια. Τι ξέρεις για τις μέλισσες;»

«Ξέρω πως σε κάθε κυψέλη υπάρχει μια βασίλισσα, που γεννάει τ' αυγά. Υπάρχουν οι θηλυκές μέλισσες, οι εργάτριες, που κάνουν όλες τις δουλειές. Και υπάρχουν και οι κηφήνες, οι αρσενικές μέλισσες, που δεν κάνουν τίποτα!» συμπλήρωσε ρίχνοντάς μου μια άγρια ματιά.

Γέλασα. Πρώτη φορά έβλεπα φεμινίστρια δέκα ετών!

«Κάτι κάνουν κι οι κηφήνες», είπα. «Γονιμοποιούν τα αυγά που γεννά η βασίλισσα. Από τα γονιμοποιημένα αυγά βγαίνουν οι εργάτριες. Από όσα δε γονιμοποιηθούν βγαίνουν οι κηφήνες. Για σκέψου λοιπόν, πόσους προγόνους έχει ένας κηφήνας;»

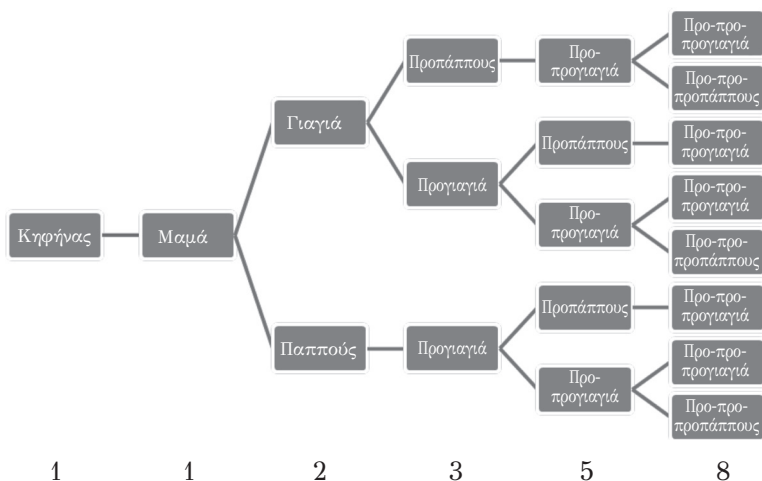
«Τι εννοείς;»

«Αφού ο κηφήνας βγαίνει από αυγό που δεν έχει γονιμοποιηθεί, δεν έχει μπαμπά, έχει μόνο μαμά».

«Ωραία».

«Τώρα οι παππούδες του... Έχει έναν παππού και μια γιαγιά από τη μαμά του. Σύνολο 2».

«Κατάλαβα! Ο παππούς του έχει μόνο μαμά. Η γιαγιά του έχει μπαμπά και μαμά. Σύνολο 3 προπαππούδες».



«Όπως βλέπεις, η ακολουθία Φιμπονάτσι είναι και πάλι εδώ! Δε μου λες... Τα σκαλοπάτια τ' ανεβαίνεις ένα ένα ή δυο δυο;»

«Μπορώ και ένα ένα, μπορώ και δυο δυο. Δοκίμασα μια φορά και τρία τρία αλλά δεν έφταναν».

«Ωραία! Ας πάρουμε μια σκάλα με τρία σκαλοπάτια. Με πόσους τρόπους μπορείς να την ανεβείς;»

Σκέφτηκε λίγο. «Ή ένα ένα τα σκαλοπάτια ή πρώτα δύο και μετά ένα ή πρώτα ένα και μετά δυο. Με τρεις τρόπους!»

«Κι αν είναι τέσσερα τα σκαλοπάτια;»

«1-1-1-1 ή 1-1-2 ή 1-2-1 ή 2-1-1 ή 2-2. Με πέντε τρόπους».

«Κι αν η σκάλα έχει 20 σκαλοπάτια;»

«Σιγά μην κάτσω να μετράω τους τρόπους».

«Δε σου ζητάω να μετρήσεις, σου ζητάω να σκεφτείς. Ας υποθέσουμε ότι έχεις βρει τους τρόπους για 3, 4, 5 μέχρι και 19 σκαλοπάτια. Μπορείς να βρεις εύκολα τους τρόπους για τα 20;»

Το πρόσωπό της φωτίστηκε. «Βέβαια! Δεν έχω παρά να πάρω όλους τους τρόπους για τα 19 σκαλοπάτια και να ανέβω το τελευταίο σκαλοπάτι που απομένει μόνο του».

«Μόνο;»

«Ή να πάρω όλους τους τρόπους για τα 18 σκαλοπάτια και να ανέβω τα δύο τελευταία σκαλοπάτια μαζί».

«Να τη πάλι η ακολουθία Φιμπονάτσι! Για να βρω κάθε καινούριο όρο, δεν έχω παρά να προσθέσω τους δύο προηγούμενους!».

«Πλάκα έχει».

«Άννα!» ακούστηκε η φωνή από δίπλα.

«Ωχ! Πρέπει να πάω να φάω». Ξίνισε τα μούτρα της.
«Νομίζω πως έχουμε φακές».



Η Άννα ήρθε πάλι να με επισκεφθεί την επόμενη μέρα το απόγευμα. Κρατούσε στα χέρια της έναν πανέμορφο ναυτίλο, τον ίδιο που είχα δει πριν από λίγες μέρες στη βιτρίνα του τουριστικού καταστήματος.

«Κοίτα τι βρήκα στη θάλασσα!» μου είπε γεμάτη υπερηφάνεια.

«Μμμ!» της είπα γελώντας. «Και ήταν πολύ βαθιά εκεί που τον βρήκες;»

Κόμπιασε. «Α... αρκετά». Είδε το ειρωνικό βλέμμα στα μάτια μου και ομολόγησε. «Εντάξει! Μου το αγόρασε χτες η νονά μου. Αλλά μια μέρα θα βρω κι εγώ ένα τέτοιο όστρακο. Ξέρεις, βουτάω πολύ βαθιά».

«Για να βρεις τέτοιο πράγμα, Αννούλα, θα πρέπει να βουτήξεις πάααρα πολύ βαθιά», της είπα. «Και σε κάποια έρημη παραλία, όχι στη δικιά μας. Στη δικιά μας το πολύ πολύ να βρεις καμιά παντόφλα ή κανένα κουτάκι από αναψυκτικό. Βλέπω όμως ότι ο Φιμπονάτσι σε κυνηγάει», πρόσθεσα.

«Ο Φιμπονάτσι; Τι δουλειά έχει πάλι αυτός με τα όστρακα;»

«Έχεις χρόνο;»

«Έχω. Δε θα πάω στη θάλασσα το απόγευμα».

«Ωραία λοιπόν. Βολέψου στη βεράντα ώσπου να φέρω τον φορητό μου υπολογιστή».

Είχα φτιάξει ένα απλό πρόγραμμα που στην πρώτη στήλη υπολόγιζε τους αριθμούς της ακολουθίας Φιμπονάτσι και στη δεύτερη διαιρούσε κάθε αριθμό με τον προηγούμενό του:

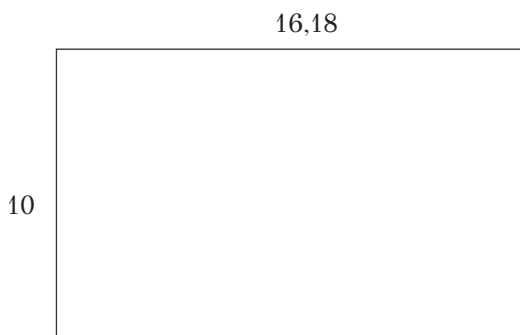
Ακολουθία Φιμπονάτσι	Πηλικά	Ακολουθία Φιμπονάτσι	Πηλικά
1	—	89	1,618181818
1	1	144	1,617977528
2	2	233	1,618055556
3	1,5	377	1,618025751
5	1,666666667	610	1,618037135
8	1,6	987	1,618032787
13	1,625	1.597	1,618034448
21	1,615384615	2.584	1,618033813
34	1,619047619	4.181	1,618034056
55	1,617647059	6.765	1,618033963

«Μου φαίνεται πως στο τέλος θα κάνει 1,618 στρογγυλό!» είπε κοιτάζοντας τη στήλη των πηλίκων.

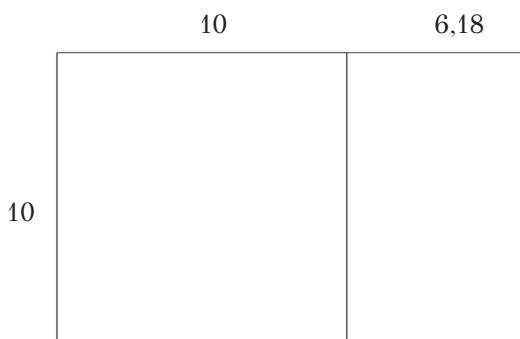
«Περίπου», της απάντησα. «Είναι αλήθεια ότι, όσο προχωράμε, τα πηλικά πλησιάζουν σ' έναν σταθερό αριθμό, που είναι αρκετά πιο περίπλοκος από το 1,618. Αφού δεν μπορούμε να τον παραστήσουμε με ακρίβεια, ας του δώσουμε ένα όνομα για να τον ξεχωρίζουμε. Συνήθως τον ονομάζουμε φ . Το 1,618 είναι μια πολύ καλή προσέγγιση του φ ».

Με κοίταξε σκεφτική. «Ναι, αλλά τι σχέση έχει αυτό το φ με το κοχύλι μου;».

«Υπομονή... Ας σχεδιάσουμε ένα ορθογώνιο που οι πλευρές του να έχουν λόγο 1,618. Ας πούμε ότι θα έχει πλάτος 16,18 και μήκος 10 εκατοστά. Ο λόγος των πλευρών θα είναι:



»Ας χωρίσουμε τώρα το ορθογώνιο σε δύο μέρη, ένα τετράγωνο και ένα ορθογώνιο. Τι διαστάσεις θα έχει το νέο ορθογώνιο;»



Σκέφτηκε λίγο. «Θα έχει πλάτος 10 και μήκος $16,18 - 10$ δηλαδή 6,18 εκατοστά».

«Για βρες μου τώρα το πηλίκο του πλάτους διά του μήκους». Με αγριοκοίταξε. Χαμογέλασα και της έτεινα ένα κομπιουτεράκι.

«1,618... περίπου», μου είπε απορημένα.

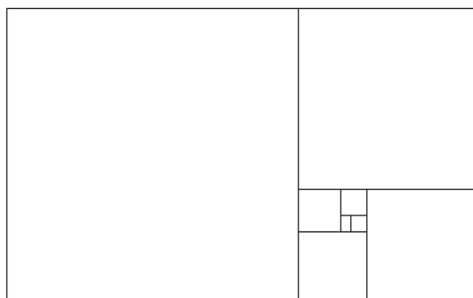
«Πάμε άλλη μια φορά», είπα εγώ. «Χωρίζουμε το ορθογώνιο σε δύο μέρη, ένα τετράγωνο και ένα ορθογώνιο. Τι διαστάσεις θα έχει το νέο ορθογώνιο;»

«Πλάτος 6,18 και μήκος $10 - 6,18$ δηλαδή 3,82».

«Και το πηλίκο;»

Αυτήν τη φορά έδειξε να εντυπωσιάζεται: «Πάλι 1,618»

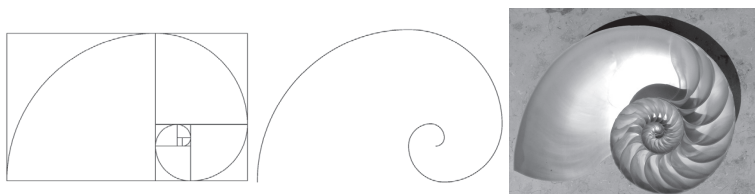
«Ας κάνουμε μερικά βήματα ακόμα:



Μήκος	Πλάτος
10	16,18
6,18	10
3,82	6,18
2,36	3,82
1,46	2,36
0,9	1,46

»Κάθε φορά το πηλίκο του πλάτους διά του μήκους θα είναι περίπου 1,618. Κι αν αντί για 1,618 το αρχικό πηλίκο ήταν ακριβώς ίσο με το φ , όλα τα νέα ορθογώνια θα είχαν διαστάσεις που ο λόγος τους θα ήταν επίσης ακριβώς φ .

»Σε καθένα από τα τετράγωνα σχεδίασε τώρα ένα τόξο κύκλου με ακτίνα την πλευρά του τετραγώνου. Η καμπύλη που σχηματίζεται έχει ακριβώς το σχήμα του ναυτίλου σου.

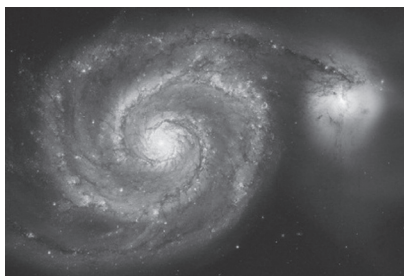


»Κι αν θυμάσαι τα λιοτρόπια που βλέπαμε χτες, οι στήμονές τους είναι αραδιασμένοι σε μια τέτοια καμπύλη».

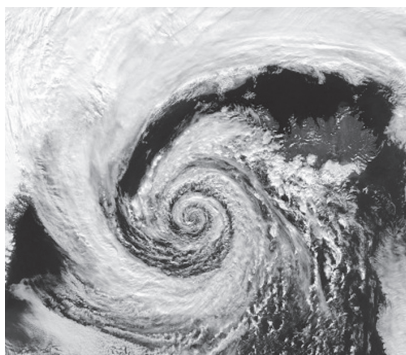
«Δύο τέτοιες καμπύλες», με διόρθωσε η Άννα. «Μια αριστερόστροφη και μια δεξιόστροφη».

«Σωστά! Την ίδια καμπύλη, μονή ή διπλή, τη βρίσκουμε παντού:

»Σε γαλαξίες...



»Σε κυκλώνεις...



»Ακόμα και στο αυτί σου...»



Έμεινε λίγο να κοιτάζει τις φωτογραφίες που είχα συγκεντρώσει στον υπολογιστή μου.

«Δε μου λες...» είπε στο τέλος. «Αυτό το φ είναι από το όνομα του Φιμπονάτσι;»

Γέλασα. «Υπάρχει κι αυτή η άποψη. Οι περισσότεροι ωστόσο θεωρούν ότι το φ προέρχεται από το όνομα του Φειδία. Του διάσημου γλύπτη που συμμετείχε και στην κατασκευή του Παρθενώνα».

«Γιατί;»

«Πρώτα πρώτα, η πρόσοψη του Παρθενώνα είναι ένα ορθογώνιο σαν αυτά που σχεδιάσαμε πιο πριν: το πηλίκο του πλάτους προς το μήκος ισούται περίπου με φ . Δεν είναι όμως μόνο αυτό. Στα αγάλματα της κλασικής περιόδου, της περιόδου δηλαδή που το όνομα του Φειδία κυριαρχούσε στον χώρο της γλυπτικής, το φ βρίσκεται παντού. Στα περισσότερα από αυτά, για παράδειγμα, ο λόγος της απόστασης του αφαλού από την πατούσα προς την απόσταση του αφαλού από την κορυφή του κεφαλιού ισούται με φ . Το ίδιο ισχύει για την απόσταση των ματιών από το πηγούνι προς την απόσταση των ματιών από την κορυφή του κεφαλιού, αλλά και για πολλές άλλες αναλογίες. Στην Αναγέννηση η αναζήτηση αυτής της αναλογίας έγινε μονομανία. Ο Ντα Βίντσι, ο Μιχαήλ Άγγελος, ο Ραφαήλ τη χρησιμοποιούν παντού. Το ίδιο ισχύει όμως και με αρκετά έργα μοντέρνας τέχνης».

«Δεν καταλαβαίνω», σχολίασε. «Με εντυπωσιάζουν οι αριθμητικές ιδιότητες του φ , δεν καταλαβαίνω όμως πώς συνδέονται με την ομορφιά».

«Για να σου πω την αλήθεια», απάντησα, «ούτε εγώ καταλαβαίνω το γιατί. Όμως από τη μια βλέπω αυτά τα έργα τέχνης και μου αρέσουν και από την άλλη διαπιστώνω την παρουσία του φ μέσα σε αυτά. Είναι τόσο συχνή, που αρχίζω να πιστεύω ότι αυτή η αναλογία έχει κάτι το ακατανόητα ευχάριστο!»

Όλο εκείνο το καλοκαίρι αλλά και αυτά που ακολούθησαν η Άννα συνέχισε να με επισκέπτεται τακτικά, άλλοτε για να μου παρουσιάσει μια ανακάλυψή της κι άλλοτε για να μου θέσει κάποιο από τα ερωτήματά της.

Σταδιακά οι κουβέντες μαζί της αποτέλεσαν ένα από τα πιο ευχάριστα συστατικά των καλοκαιρινών μου διακοπών, ένα από τα πράγματα που νοσταλγούσα όλο τον χειμώνα.

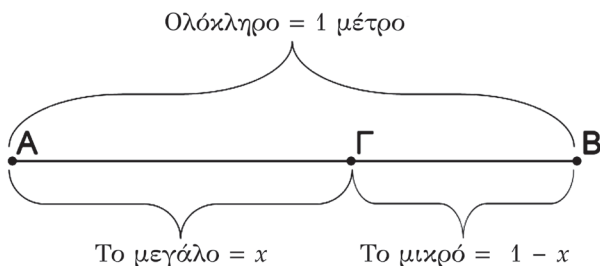
Μερικά χρόνια αργότερα, όταν κόντευε να τελειώσει το γυμνάσιο, μιλήσαμε πάλι για το φ . Τώρα πια μπορούσα να της δώσω τον ορισμό του Ευκλείδη:

Δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα έχει χωριστεί σε άκρο και μέσο λόγο, όταν έχει χωριστεί σε δύο άνισα τμήματα, έτσι ώστε ο λόγος του μεγαλύτερου προς το μικρότερο να ισούται με τον λόγο του όλου προς το μεγαλύτερο τμήμα.¹

Ο Λεονάρντο Ντα Βίντσι ήταν μάλλον ο πρώτος που χαρακτήρισε τον χωρισμό ενός ευθύγραμμου τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο χρυσή τομή.

Ας υποθέσουμε ότι το τμήμα μας έχει μήκος ένα μέτρο και ας ονομάσουμε x το μήκος του μεγαλύτερου από τα δύο μέρη στα οποία χωρίζεται.

Τότε το μικρότερο έχει μήκος $1-x$.



Σύμφωνα με τον ορισμό πρέπει

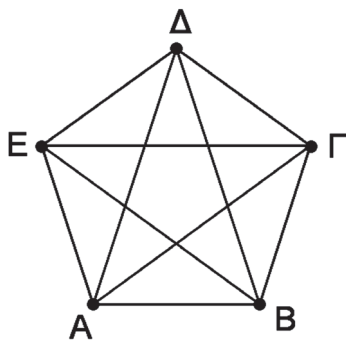
$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x}$$

Η εξίσωση αυτή είναι ισοδύναμη με τη $x^2 + x - 1 = 0$.

Λύνοντάς την βρίσκουμε $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (η δεύτερη λύση $x = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$ είναι αρνητική και απορρίπτεται).

Γι' αυτή την τιμή του x ο λόγος $\varphi = \frac{x}{1-x} = \frac{1}{x}$ ισούται με $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ο αριθμός φ εμφανίζεται και στο κανονικό πεντάγωνο, το πολύγωνο δηλαδή που έχει όλες τις γωνίες του και όλες τις πλευρές του ίσες.



Μπορούμε σχετικά εύκολα να αποδείξουμε ότι ο λόγος της διαγωνίου του προς την πλευρά του ισούται με φ . Για παράδειγμα $ΑΓ/ΑΒ = \varphi$. Όταν φέρουμε όλες τις διαγωνίους του, σχηματίζεται ένα δεύτερο πεντάγωνο.

Αυτή την ιδιότητα την έχει μόνο το κανονικό πεντάγωνο. Γι' αυτό και οι μαθητές του Πυθαγόρα τού αναγνώριζαν μαγικές ιδιότητες. Το είχαν επιλέξει ως σύμβολο για τη σχολή τους και το αποκαλούσαν «υγεία».

Αυτή η κουβέντα που κάναμε για τη σχέση του φ με το πεντάγωνο ήταν και η τελευταία. Το επόμενο καλοκαίρι η Άννα δε με επισκέφθηκε καθόλου. Μια δυο φορές που τη συνάντησα στο μπακάλικο και στην παραλία έκανε πως δε με είδε. Μεγάλωσε, σκέφτηκα. Είναι στην ηλικία που οποιαδήποτε φιλία με τους «γέροντες» θεωρείται υποτιμητική. Αν μάλιστα ομολογούσε στην παρέα της ότι κουβέντιαζε μαζί μου για μαθηματικά, κινδύνευε να την πάρουν στο φιλό. Μου κακοφάνηκε λιγάκι αλλά... το συνήθισα.

2.

ΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Πέρασαν δύο ακόμη καλοκαίρια. Κι ύστερα, μια μέρα, πάλι τέλη Ιουνίου ήταν, έκανε ξανά την εμφάνισή της στην πόρτα του κήπου μου. Φορούσε ένα κουρελιασμένο παντελόνι από ξεθωριασμένο τζιν – αργότερα έμαθα ότι κάθε του σκίσιμο διπλασίαζε την τιμή του. Τα μαλλιά της ήταν κοντοκουρεμένα από τη μια μεριά και βαμμένα σε χρώμα παπαγαλί, ενώ από την άλλη ήταν πλεγμένα σε μικρά κοτσιδάκια με πολύχρωμα εξτένσιον ανάμεσα στις τούφες. Στο πάνω μέρος της μύτης της γυαλοκοπούσε ένα μικροσκοπικό καρφί – νομίζω πως τα λένε πέρσινγκ αυτά τα πράγματα. Ήταν όμως η ίδια αυθάδικη μύτη που είχε ξεπροβάλει πριν από μερικά χρόνια μέσα από τα λιοτρόπια μου, όπως ίδια ήταν και τα μεγάλα περίεργα μάτια της, που με κοίταζαν με μια δόση ενοχής.

«Καλώς την Αννούλα!» είπα.

Με κοίταξε διστακτικά. «Να 'ρθω;» ρώτησε.

«Και βέβαια. Έλα στη βεράντα. Νομίζω πως έχουμε σπιτική πορτοκαλάδα».

«Σόρι που χάθηκα», είπε μόλις βολεύτηκε στην πολυθρόνα της, «αλλά... να...» Θεώρησα την εξήγηση επαρκή και την ενθάρρυνα με το βλέμμα να συνεχίσει.

«Η αλήθεια είναι ότι μου λείψανε οι κουβέντες μας...»

«Εγώ πάντως εδώ είμαι».

«Είναι κι αυτό το παιδί στο σχολείο...»

«Ναι;»

«Με τσαντίζει. Τα κορίτσια, λέει, δεν μπορούν να καταλάβουν τα μαθηματικά. Ακόμα κι αν τα καταφέρνουν στο σχολείο, είναι από το πολύ φυτούλιασμα, όχι γιατί καταλαβαίνουν την ουσία».

«Κι εσύ θα ήθελες να καταλάβεις την ουσία;»

«Έεε, ναι...»

«Γιατί;»

«Στο σχολείο τα καταφέρνω. Λύνω τις δύσκολες ασκήσεις, έχω μάθει όλα τα κόλπα, αλλά...»

«Αλλά;»

«Δεν πολυπιάνω τι νόημα έχουν όλα αυτά. Γιατί τα κάνουμε, πώς συνδέονται, πού εφαρμόζονται... Ο Δημήτρης λέει πως τα καταλαβαίνει αλλά ότι εγώ...»

«Ο Δημήτρης;»

Προσπάθησε να πάρει αδιάφορο ύφος.

«Αυτό το παιδί στο σχολείο...»

Δίστασε, κοκκίνισε και τέλος το πήρε απόφαση.

«Εντάξει. Είναι ο φίλος μου. Και μου την έχει κατασπάσει με το ύφος του και τις παινεσιές του».

«Ωραία λοιπόν. Για πες μου, εσύ τι νομίζεις πως είναι τα μαθηματικά;»

«Ξέρω κι εγώ; Αριθμοί, πράξεις, εξισώσεις, σχήματα...»

«Ας αρχίσουμε λοιπόν από τους αριθμούς».

Έφαξα λίγο στο iPad μου ώσπου βρήκα την εικόνα που ήθελα.

«Τι είν' αυτό;»

«Είναι ένα κόκαλο λύκου. Βρέθηκε σ' έναν παλαιολιθικό οικισμό στο Βεστόνιτσε της Τσεχίας».

«Και τι είναι αυτές οι χαρακιές που έχει;»

«Τούτες οι χαρακιές, Αννούλα, είναι μια πρώτη απόπειρα αρίθμησης. Αυτός ο πρόγονός μας κάτι προσπαθούσε να μετρήσει. Πόσα ζώα είχε σκοτώσει στο κυνήγι; Πόσες μέρες είχαν περάσει από την τελευταία βροχή; Πόσα βήματα ήταν το πλάτος της σπηλιάς του; Δεν ξέρω τι μετρούσε, κάτι όμως μετρούσε. Για κάθε μία μονάδα έκανε σε τούτο το κόκαλο κι από μία χαρακιά. Αυτή είναι η βάση της αρίθμησης: Η ένα προς ένα αντιστοιχία. Για κάθε μέρα που περνάει, μια χαρακιά στον τοίχο. Για κάθε αρνί μες στο μαντρί, ένα βότσαλο μέσα στο σακούλι».

Γέλασε: «Οι πολύ πλούσιοι βοσκοί θα πρέπει να ήταν μονίμως πιασμένοι, με όλες αυτές τις πέτρες που θα έπρεπε να κουβαλάνε».

«Έχεις δίκιο. Για πρόσεξε όμως καλύτερα το κόκαλο. Πόσες χαρακιές έχει;»

Έσκυψε πάνω από τη φωτογραφία –ευτυχώς την είχα σε πολύ καλή ανάλυση– και μέτρησε προσεκτικά.

«55!»

«Βλέπεις τίποτα άλλο;»

«Είναι χωρισμένες ανά πέντε. Κάθε πέμπτη χαρακιά είναι πιο μεγάλη από τις άλλες».

«Και;»

«Η εικοστή πέμπτη και η πεντηκοστή χαρακιά είναι ακόμα πιο μεγάλες».

«Με μια ματιά λοιπόν ο προϊστορικός μας πρόγονος μπορούσε να καταλάβει ότι έχει δύο εικοσιπεντάδες και μία πεντάδα: 55 χαρακιές. Αν συνέχιζε το μέτρημα, θα έκανε άλλες τέσσερις μικρές χαρακιές, ενώ την πέμπτη θα την έκανε πάλι λίγο μεγαλύτερη για να τονίσει ότι έχει άλλη μία πεντάδα».

«Κι όταν θα έφτανε στις εβδομήντα πέντε χαρακιές, θα έκανε μια ακόμα πιο μεγάλη για να σημειώσει μία ακόμη 25άδα!»

«Σωστά. Έτσι οι ποσότητες που μετρούσε κατατάσσονταν σε 5άδες, 25άδες – δηλαδή 5άδες 5άδων και...»

Σκέφτηκε λίγο...

«125άδες: 5άδες 25άδων!»

«Πολύ σωστά! Οπότε πώς θα σημάδευε την εκατοστή ογδοηκοστή τρίτη μέρα από τη γέννηση του μωρού του;»

«Μμ... Για να δούμε: Μία 125άδα, δύο 25άδες, μία 5άδα και τρεις μονάδες. $125 + 2 \cdot 25 + 5 + 3 = 183$ ».

«Μπράβο! Αυτό είναι το πενταδικό σύστημα αρίθμησης. Μονάδες-5άδες-5άδες 5άδων (25άδες)-5άδες 25άδων (125άδες)»...

«5άδες 125άδων, δηλαδή 625άδες, και πάει λέγοντας...»

«Οπότε ο φίλος σου, ο πλούσιος βοσκός, αν είχε 183 πρόβατα, δε θα χρειαζόταν να κουβαλάει 183 βότσαλα και να κοφομεσιάζεται. Θα μπορούσε να κουβαλάει ένα μεγάλο βότσαλο –μία 125άδα–, δύο λίγο μικρότερα –δύο 25άδες–, ένα ακόμα πιο μικρό –μία 5άδα– και τρία χαλικιάκια».

«Γιατί όμως το πέντε; Τι το ειδικό έχει το πέντε;»

«Κοίτα το χέρι σου και θα δεις. Το πιο βολικό αντικείμενο για να κάνεις μια ένα προς ένα αντιστοιχία είναι το χέρι σου με τα πέντε του δάχτυλα. Εκτός όμως από τούτο το κόκαλο έχουμε κι άλλες ενδείξεις ότι οι άνθρωποι μετρούσαν κάποτε με βάση το πέντε».

«Δηλαδή;»

«Ο Όμηρος, ας πούμε, στην Οδύσσεια² χρησιμοποιεί το ρήμα *πεμπάζομαι* για να πει μετρώ. *Πεμπάζομαι*, δηλαδή μετρώ στα πέντε δάχτυλα!»

«Ναι, αλλά εμείς μετράμε με βάση το 10».

«Βέβαια! Αφού έχουμε δύο χέρια, είναι πιο βολικό να μετράμε με βάση το 10: δέκα δάχτυλα. Το εξηγεί κι ο Αριστοτέλης³:

Γιατί όλοι οι άνθρωποι, τόσο οι Έλληνες όσο και οι βάρβαροι, να μετρούν μέχρι το δέκα και όχι μέχρι κάποιον άλλον αριθμό, όπως το 2, 3, 4 ή 5, και μετά να αρχίζουν πάλι από την αρχή, λέγοντας για παράδειγμα ένα πέντε, δύο πέντε, όπως λένε ένδεκα [ένα δέκα], δώδεκα [δύο δέκα]... Μήπως επειδή όλοι οι άνθρωποι γεννιούνται με δέκα δάχτυλα; Χρησιμοποιώντας τα δέκα δάχτυλά τους

σαν χαλίκια, συνήθισαν με βάση αυτό τον αριθμό να μετρούν και όλα τα άλλα».

Γέλασε.

«Τότε θα έπρεπε να μετρούν με βάση το είκοσι. Έτσι ξυπόλυτοι που τριγυρνούσαν, δε θα είχαν δυσκολία να χρησιμοποιούν και τα δάκτυλα των ποδιών τους».

«Έχεις δίκιο. Οι Μάγιας, ένας αρχαίος λαός της Νότιας Αμερικής, μετρούσε με βάση το εικοσαδικό σύστημα. Αλλά όχι μόνο οι Μάγιας. Γαλλικά ξέρεις;»

«Βέβαια! Έχω και Sorbonne».

«Το 80 πώς το λένε στα γαλλικά;»

«Quatre-vingt. Φοβερό! Δεν το είχα σκεφτεί ποτέ. Τέσσερα εικοσάρια!»

«Και το 92;»

«Καλά αυτό δεν υπάρχει! Quatre-vingt-douze. Τέσσερα εικοσάρια και δώδεκα!»

«Έτσι λοιπόν. Η βάση της αρίθμησης είναι η ένα προς ένα αντιστοιχία. Και τα κύρια μέσα της οι χαρακιές, τα χαλίκια και τα δάκτυλα!»

«Μήπως τα παραλές;»

«Ξένες γλώσσες ξέρεις. *Calculate, calculer*: υπολογίζω. Από τη λατινική λέξη *calculus*, που θα πει χαλίκι. *Digit, digital*: ψηφίο, ψηφιακό. Από τη λατινική λέξη *digit*, δάκτυλο. *Computer* από τη λατινική ρίζα *putare*: κόβω, χαράζω. Η ένα προς ένα αντιστοιχία έμαθε στους ανθρώπους να μετρούν, και χάρη στα χέρια τους μπόρεσαν να διαλέξουν το ιδανικό σύστημα αρίθμησης: το δεκαδικό».

Με κοίταξε πονηρά.

«Φυσικά, όλα αυτά μέχρι ν' αρχίσουν οι μοιρασιές και οι... καβγάδες».

«Τι εννοείς;»

«Εντάξει, έχω ακούσει να λένε “μισό δαχτυλάκι κρασί παρακαλώ”, δε φαντάζομαι όμως ότι μπορεί να μοιράσει κανείς με τα... δάκτυλα!»

«Λοιπόν, Άννα, είσαι αστείρι. Όποιος είπε πως δεν πιάνεις το νόημα των μαθηματικών είναι χαζός. Οι ακέραιοι αριθμοί που βασίστηκαν στην ένα προς ένα αντιστοιχία ήταν απολύτως επαρκείς για όλες τις συναλλαγές εκτός από τις μοιρασιές. Η μοιρασιά με ακέραιους αριθμούς μπορεί να γίνει μόνο κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις. Αν ένα πλήθος μπορεί να μοιραστεί εξίσου σε δύο μέρη, λέμε ότι ο αριθμός που το καταμετρά είναι άρτιος. Το 2, το 4, το 6 είναι άρτιοι αριθμοί. Όταν όμως μετά τη μοιρασιά περισσεύει ακόμα μία μονάδα, λέμε ότι ο αριθμός είναι περιττός».

«Στην πραγματικότητα δεν είναι ολόκληρος ο αριθμός περιττός, η μονάδα που περισσεύει είναι περιττή».

«Έχεις δίκιο. Αντί να λέμε ότι οι αριθμοί 3, 5, 7 κτλ., όταν μοιράζονται στα δύο, αφήνουν μια “περιττή” μονάδα, λέμε απλώς ότι είναι περιττοί. Οι άρτιοι αριθμοί (οι ζυγοί) μπορούν να γραφούν με τη μορφή $2 \cdot x$, όπου x ακέραιος, ενώ οι περιττοί (οι μονοί) γράφονται ως $2 \cdot x + 1$ ».

«Αν είναι όμως να γίνει τόση φασαρία σε μια μοιρασιά στα δύο, φαντάζομαι τι θα γινόταν όταν έπρεπε να μοιραστεί κάτι στα τρία ή στα επτά ας πούμε».

«Μην μπλέκεις τα πράγματα. Το πρόβλημα της πρα-

κτικής διαίρεσης αντιμετωπίστηκε με επιτυχία από πολύ νωρίς. Τόσοι οι Βαβυλώνιοι όσο και οι Αιγύπτιοι είχαν βρει πολύ έξυπνους τρόπους να παριστάνουν και να διαχειρίζονται τα κλάσματα».

«Κλάσμα... Τι λέξη κι αυτή!»

«Από το αρχαίο ρήμα κλάω, που σημαίνει σπάζω, τεμαχίζω. Χωρίζω μια ποσότητα σε ίσα μέρη και το καθένα από αυτά είναι ένα κλάσμα της αρχικής ποσότητας. Ένα κλάσμα περιέχει δύο αριθμητικές πληροφορίες. Τον παρονομαστή, που μας λέει σε πόσα ίσα μέρη έχω χωρίσει την αρχική ποσότητα, και τον αριθμητή, που μας λέει πόσα από αυτά τα μέρη περιέχει η κάθε μερίδα».

«Χαχά! Σαν γκαρσόνι μιλάς. Μια μερίδα πατάτες!»

«Το σκέφτηκες ποτέ ότι και η λέξη μερίδα προέρχεται από το μοιράζω; Όταν λέμε ότι κατά την κατασκευή των πυραμίδων η μερίδα σε ψωμί του κάθε εργάτη ήταν $\frac{3}{4}$ του καρβελιού, εννοούμε ότι το κάθε καρβέλι χωριζόταν σε 4 ίσα μέρη και ο εργάτης έπαιρνε για το μεσημεριανό του 3 από αυτά».

Με κοίταξε λίγο σκεφτική. «Μεσημεριανό ε;»

«Ναι. Γιατί;»

«Μεσημέρι. Μισή μέρα. Κι αυτή η λέξη κλάσμα είναι!»

«Και μάλιστα διάσημο κλάσμα. Το μόνο που έχει δικό του όνομα, ανεξάρτητο από τον παρονομαστή του. Όλα τα άλλα κλάσματα είναι άμεσα συνδεδεμένα με τον παρονομαστή τους: ένα τρίτο, δύο πέμπτα, τέσσερα έβδομα. Κανένα από αυτά τα κλάσματα δεν έχει δικό του όνομα. Μόνο το ένα δεύτερο λέγεται μισό».

«Γιατί αυτό;»

«Φαντάζομαι πως οι άνθρωποι επινόησαν τον χωρισμό στα δύο πολύ πριν ανακαλύψουν τις υπόλοιπες διαιρέσεις, γι' αυτό κι έδωσαν στο $1/2$ δικό του, ιδιαίτερο όνομα. Ίσως μάλιστα στις πρωτόγονες κοινωνίες, που το μέτρημα δεν ήταν και σε πρώτη ζήτηση, να μην υπήρχαν παρά μόνο οι αριθμοί ένα, δύο και μισό».

«Γιατί το λες αυτό;»

«Αρχαία Ελληνικά κάνετε στο σχολείο;»

«Ουφ! Κάνουμε. Δεν ξέρεις πόσο τα βαριέμαι».

«Έχεις άδικο. Έχετε λοιπόν μάθει στα αρχαία ότι εκτός από τον ενικό και τον πληθυντικό...»

«Υπάρχει και ο δυϊκός! Μηδὲ δίκην δικάσσης, πρὶν ἄμφοϊν μῦθον ἀκούσσης⁴. Το “ἄμφοϊν” είναι δυϊκός αριθμός».

«Αυτό μπορεί να σημαίνει ότι στα πολύ παλιά χρόνια το δύο θεωρούνταν κάτι ξεχωριστό, ενώ τα πλήθη από το τρία και πάνω ήταν απλώς “πολλά”. Όσο όμως η κοινωνία προόδευε, τόσο πλήθαιναν και οι ανάγκες της για αριθμούς».

«Φαντάζομαι πως με τους ακέραιους αριθμούς και με τα κλάσματα μπόρεσαν να καλύψουν πια όλες τους τις ανάγκες...»

«Το ίδιο πίστεψαν και οι αρχαίοι μαθηματικοί. Όταν μάλιστα ο Πυθαγόρας ανακάλυψε πως οι αριθμοί μπορούν να περιγράψουν ακόμα και τη μουσική...»

«Τη μουσική! Τι εννοείς;»

«Ο Πυθαγόρας ανακάλυψε μια σχέση ανάμεσα στα κλάσματα και στις νότες της μουσικής. Μάλιστα ο Βοή-

θιος, ένας Ρωμαίος φιλόσοφος του δού αιώνα μ.Χ., αφηγείται τον τρόπο με τον οποίο έγινε αυτή η ανακάλυψη. Μας λέει ότι μια μέρα που έκανε ο Πυθαγόρας τη βόλτα του στην πόλη εντυπωσιάστηκε από μια ιδιαίτερη μουσική που έφτασε στ' αυτιά του. Ήταν ένας σχεδόν τέλειος σκοπός με μερικές μόνο παραφωνίες. Αναζήτησε την προέλευση αυτής της μουσικής και ανακάλυψε ότι προερχόταν από ένα σιδεράδικο. Πέντε σιδεράδες χτυπούσαν ο καθένας το αμόνι του και το αποτέλεσμα ήταν μια μελωδία. Ζήτησε από τους σιδεράδες να τον αφήσουν να ζυγίσει τα σφυριά. Τέσσερα από αυτά είχαν βάρη ανάλογα των αριθμών 12, 9, 8 και 6. Το βάρος του πέμπτου σφυριού δεν είχε καμιά ενδιαφέρουσα αριθμητική σχέση με τα άλλα τέσσερα. Παρακάλεσε να ξαναρχίσουν τη δουλειά τους χωρίς το πέμπτο σφυρί. Η παραφωνία εξαφανίστηκε! Η μελωδία έγινε απολύτως αρμονική. Αμέσως μπήκε στο μυαλό του Πυθαγόρα η ιδέα ότι η αρμονία οφείλεται στις αριθμητικές σχέσεις ανάμεσα στα βάρη των σφυριών. Όταν επέστρεψε στο σπίτι του, πειραματίστηκε με χορδές. Πάλι ανακάλυψε ότι οι νότες που παράγουν τα έγχορδα βρίσκονται σε αναλογία με τα μήκη των χορδών. Συνέχισε τα πειράματά του με αυλούς διαφορετικών μηκών και διαπίστωσε το ίδιο πράγμα. Τότε ήταν που πείστηκε ότι οι αριθμοί μπορούν να περιγράψουν τα πάντα! "Όλα είναι αριθμός", φέρεται να είπε. "Όλα δηλαδή μπορούν να παρασταθούν από τους ακέραιους αριθμούς και τους λόγους τους, τα κλάσματά τους».⁵



Ο Πυθαγόρας, όπως τον φαντάστηκε ο Βοήθιος,
να αναζητεί μια αντιστοιχία μεταξύ ήχων και αριθμών.

Γέλασα.

«Ο καημένος... Δεν έλαβε υπόψη του έναν πολύ ση-
μαντικό παράγοντα!»

«Ποιον;»

«Το... πυθαγόρειο θεώρημα».